封闭性条件

（本页所有符号、概念都是元语言中的）

封闭性条件

（本页所有符号、概念都是元语言中的）

定义

给定论域 A，任给 R 是 A 上的 $n{+}1$ 元谓词 $(n \in N)$，称形如 “$\forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$ ” 的命题为关于 X 的 $(n{+}1)$ 阶封闭性条件 。

封闭性条件

（本页所有符号、概念都是元语言中的）

定义

给定论域 A，任给 R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \in N$)，称形如 "$\forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$" 的命题为关于 X 的 (n+1) 阶封闭性条件。

定理

(1).1 阶封闭性条件形如 $X_0 \subseteq X$。(X_0 是 A 的子集)
(2). 有限多个高阶封闭性条件的合取是高阶封闭性条件。（"高阶"指阶数 >1）

广义滤

定义

有限个关于 X 的滤型条件的合取称为关于 X 的滤条件。

广义滤

定义

有限个关于 X 的滤型条件的合取称为关于 X 的滤条件 。

由上一页的讨论知，滤条件一般具有“$X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$”$(n \geq 1)$ 的形式。

广义滤

定义

有限个关于 X 的滤型条件的合取称为关于 X 的*滤条件*。

由上一页的讨论知，滤条件一般具有 "$X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$" $(n \geq 1)$ 的形式。

定义

设 $F(X)$ 是一个关于 X 的滤条件。任给 A 的子集 X，若 $F(X)$，则称 X 为 A(在 F 下) 的一个*广义滤*。

$\cap$-保持定理

定理 ($\cap$-保持定理)

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 $n{+}1$ 元谓词 $(n \geq 1)$，
若 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
则 Q 具有 $\cap$-保持性，即 $Q(\Omega)$。(其中，$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$)

$\cap$-保持定理

定理 ($\cap$-保持定理)

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 $n+1$ 元谓词 ($n \geq 1$)，
若 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
则 Q 具有 $\cap$-保持性，即 $Q(\Omega)$。(其中，$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$)

Proof.

以 n=2 的情况为例：$\square$

∩-保持定理

定理 (∩-保持定理)

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \geq 1$)，
若 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \land \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
则 Q 具有 ∩-保持性，即 $Q(\Omega)$。(其中，$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$)

Proof.

以 n=2 的情况为例： □

$\cap$-保持定理

由 $\cap$-保持定理，我们可以定义“由 A_0 生成的滤”。

$\cap$-保持定理

由 $\cap$-保持定理，我们可以定义“由 A_0 生成的滤”。

定义

$F(X)$ 是滤条件，A_0 是 A 的子集，称 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) \mid A_0 \subseteq X \wedge X$ 是广义滤 $\}$ 为由 A_0 生成的滤。

$\cap$-保持定理

由 $\cap$-保持定理，我们可以定义“由 A_0 生成的滤”。

定义

$F(X)$ 是滤条件件，A_0 是 A 的子集，称 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | A_0 \subseteq X \wedge X$ 是广义滤 $\}$ 为由 A_0 生成的滤。

记 $Q(X) = (A_0 \subseteq X \wedge F(X))$，

$\cap$-保持定理

由 $\cap$-保持定理，我们可以定义“由 A_0 生成的滤”。

定义

$F(X)$ 是滤条件，A_0 是 A 的子集，称 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) |$ $A_0 \subseteq X \wedge X$ 是广义滤 $\}$ 为由 A_0 生成的滤。

记 $Q(X) = (A_0 \subseteq X \wedge F(X))$，易知，Q(X) 具有“$X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$ ”$(n \geq 1)$ 的形式。

$\cap$-保持定理

由 $\cap$-保持定理，我们可以定义“由 A_0 生成的滤”。

定义

$F(X)$ 是滤条件，A_0 是 A 的子集，称 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) \mid A_0 \subseteq X \wedge X$ 是广义滤 $\}$ 为由 A_0 生成的滤。

记 $Q(X) = (A_0 \subseteq X \wedge F(X))$，易知，Q(X) 具有“$X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X)$ ”$(n \geq 1)$ 的形式。
故 Q 具有 $\cap$-保持性，$Q(\Omega)$。

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，$\Omega = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) =$

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge$

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \geq 1$)，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A,$

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ ，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \geq 1$)，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \geq 1$)，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。

构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。

（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$
- 任意公式ϕ，$(\phi \in X \Rightarrow \neg\phi \in X)$

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ ，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$
- 任意公式ϕ，$(\phi \in X \Rightarrow \neg\phi \in X)$
- 任意公式ϕ, ψ，$(\phi, \psi \in X \Rightarrow (\phi \to \psi) \in X$ ）

∩-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$
- 任意公式ϕ，$(\phi \in X \Rightarrow \neg\phi \in X)$
- 任意公式ϕ, ψ，$(\phi, \psi \in X \Rightarrow (\phi \to \psi) \in X$ ）

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$
- 任意公式ϕ，$(\phi \in X \Rightarrow \neg\phi \in X)$
- 任意公式ϕ, ψ，$(\phi, \psi \in X \Rightarrow (\phi \to \psi) \in X$ ）

定理 (归纳定理)

任意 A 的子集 X，$(\Omega \subseteq X \iff G(X))$。

$\cap$-保持定理

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$，
$\Omega = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
构造 $G(X) = (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in (X \cap \Omega)^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
（公式归纳法证性质 X：

- 命题变量集 $\subseteq X$
- 任意公式ϕ，$(\phi \in X \Rightarrow \neg\phi \in X)$
- 任意公式ϕ, ψ，$(\phi, \psi \in X \Rightarrow (\phi \to \psi) \in X$ ）

定理 (归纳定理)

任意 A 的子集 X，$(\Omega \subseteq X \iff G(X))$。

Proof.

利用 $\cap$-保持定理以及 $\forall X \in \wp(A), (Q(X) \Rightarrow \Omega \subseteq X)$ 进行等价变形。 □

∩∪ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) \mid A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。

$\cap\cup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | \ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。
我们想证明以下直观：Ω 中的元素

$\cap\cup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) |\ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。
我们想证明以下直观：Ω 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

$\cap\cup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) |\ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。我们想证明以下直观：$\Omega$ 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ 。

$\cap\cup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | \ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。我们想证明以下直观：$\Omega$ 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ 。
递归定义一列 A 的子集：$C_0, C_1, C_2, \ldots$

∩∪ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | \ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。
我们想证明以下直观：Ω 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ 。
递归定义一列 A 的子集：$C_0, C_1, C_2, \ldots$

- $C_0 = X_0$;

$\cap\cup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) |\ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。我们想证明以下直观：Ω 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 $(n \geq 1)$，设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ 。递归定义一列 A 的子集：$C_0, C_1, C_2, \ldots$

- $C_0 = X_0$;
- 任意 $k \in N$，$C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$

$\bigcap\bigcup$ 定理

滤条件 F(X)，由 A_0 生成的滤 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) |\ A_0 \subseteq X \wedge F(X)\}$。
我们想证明以下直观：Ω 中的元素就是通过 A_0 中的元素和封闭性条件 F，在有限步内构造出来的。

任给 X_0 是 A 的子集，R 是 A 上的 n+1 元谓词 ($n \geq 1$)，设
$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ 。
递归定义一列 A 的子集：$C_0, C_1, C_2, \ldots$

- $C_0 = X_0$;
- 任意 $k \in N$，$C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$
(在每一步，把原集合经封闭性条件 F 得到的元素，作为新元素加入原集合中。)

$\cap\cup$ 定理

$$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))。$$
$(n \geq 1)$

$\cap\cup$ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \land \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$
令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。

∩∪ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$
令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
$C_0 = X_0$， $C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$。

$\cap\cup$ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$

令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。

$C_0 = X_0$，$C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$。

令 $\Gamma_2 = \{C_k | k \in N\}$。

∩∪ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$
令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
$C_0 = X_0$， $C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$。
令 $\Gamma_2 = \{C_k | k \in N\}$。

定理 (∩∪ 定理)

$\bigcap \Gamma_1 = \bigcup \Gamma_2$

∩∪ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$
令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
$C_0 = X_0$，$C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$。
令 $\Gamma_2 = \{C_k | k \in N\}$。

定理 (∩∪ 定理)

$\bigcap \Gamma_1 = \bigcup \Gamma_2$

Proof.

$\subseteq$：证 $Q(\bigcup \Gamma_2)$

∩∪ 定理

$Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$。
$(n \geq 1)$
令 $\Gamma_1 = \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$。
$C_0 = X_0$， $C_{k+1} = C_k \cup \{y \in A | \exists \bar{x} \in (C_k)^n, R(\bar{x}, y)\}$。
令 $\Gamma_2 = \{C_k | k \in N\}$。

定理 (∩∪ 定理)

$\bigcap \Gamma_1 = \bigcup \Gamma_2$

Proof.

$\subseteq$： 证 $Q(\bigcup \Gamma_2)$
$\supseteq$： 证 $\forall k \in N, C_k \subseteq \bigcap \Gamma_1$（数学归纳法） □

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$。

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \overline{x} \in X^n, (R(\overline{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, \ldots, y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \overline{x} \in X^n, (R(\overline{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$ 。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, \ldots, y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

- $y_i \in X_0$

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup \Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$ 。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, \ldots, y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

- $y_i \in X_0$
- $\exists 1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$，$R(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}, y_i)$

$\bigcap\bigcup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, \ldots, y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

- $y_i \in X_0$
- $\exists 1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$，$R(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}, y_i)$ *(y_i 是由之前的元素通过封闭性条件得到的)*

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$ 。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, \ldots, y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

- $y_i \in X_0$
- $\exists 1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$， $R(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}, y_i)$
  (y_i 是由之前的元素通过封闭性条件得到的)

定理

$\bigcup\Gamma_2 = \{a \in A | \exists$ 以 a 结尾的 Q-构造序列 $\}$

$\cap\cup$ 定理

用“构造序列”的概念可以更清晰地刻画出 $\bigcup\Gamma_2$ 中的元素。

定义

设 $Q(X) \iff (X_0 \subseteq X \wedge \forall y \in A, \forall \bar{x} \in X^n, (R(\bar{x}, y) \Rightarrow y \in X))$ $(n \geq 1)$。一个 *Q-构造序列* 是一个 A 的元素序列 $y_1, ..., y_n$，且每个 y_i 满足以下条件之一：

- $y_i \in X_0$
- $\exists 1 \leq j_1, ..., j_n < i$，$R(y_{j_1}, ..., y_{j_n}, y_i)$ *(y_i 是由之前的元素通过封闭性条件得到的)*

定理

$\bigcup\Gamma_2 = \{a \in A | \exists$ 以 a 结尾的 Q-构造序列 $\}$

1. 背景
2. 核心定理
3. 应用

证明 Bernstain 定理

Bernstain 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。

证明 Bernstain 定理

Bernstain 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。
设 $E \subseteq A$，令

$$\tau(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ x & x \in B \setminus E \end{cases} \tag{1}$$

则 τ 是 B 到 A 的双射

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
(分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。
设 $E \subseteq A$，令

$$\tau(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ x & x \in B \setminus E \end{cases} \tag{1}$$

则 τ 是 B 到 A 的双射
$\iff \exists E \subseteq A, f[E] \cup A \setminus E = B$ 且 $f[E] \cap A \setminus E = \varnothing$

证明 Bernstain 定理

Bernstain 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。
设 $E \subseteq A$，令

$$\tau(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ x & x \in B \setminus E \end{cases} \tag{1}$$

则 τ 是 B 到 A 的双射
$\iff \exists E \subseteq A, f[E] \cup A \setminus E = B$ 且 $f[E] \cap A \setminus E = \varnothing$
由集合运算的性质可以证明，

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。
设 $E \subseteq A$，令

$$\tau(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ x & x \in B \setminus E \end{cases} \tag{1}$$

则 τ 是 B 到 A 的双射
$\iff \exists E \subseteq A, f[E] \cup A \setminus E = B$ 且 $f[E] \cap A \setminus E = \varnothing$
由集合运算的性质可以证明，
$\iff \exists E \subseteq A, E = (A \setminus E) \cup f[E])$

证明 Bernstein 定理

Bernstein 定理：任意集合 A、B，若 A 到 B、B 到 A 都存在单射，则 A、B 间存在双射。

我们证明它的一个等价版本：任意集合 A，B 是 A 的子集，若 A 到 B 存在单射，则 A、B 间存在双射。
（分析：
已有信息仅为：A 到 B 的单射 f，$B \subseteq A$。
尝试由 f 和恒等映射出发，构造 A 到 B 的双射 τ。
设 $E \subseteq A$，令

$$\tau(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ x & x \in B \setminus E \end{cases} \tag{1}$$

则 τ 是 B 到 A 的双射
$\iff \exists E \subseteq A, f[E] \cup A \setminus E = B$ 且 $f[E] \cap A \setminus E = \varnothing$
由集合运算的性质可以证明，
$\iff \exists E \subseteq A, E = (A \setminus E) \cup f[E])$

证明 Bernstain 定理

我们可以证明一个更一般的结论：

证明 Bernstain 定理

我们可以证明一个更一般的结论：

定理

任意集合 A，$X_0 \subseteq A$，f 是 A 到 A 的函数，令 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \cup f[X] \subseteq X\}$，则：$X_0 \cup f[\Omega] \subseteq \Omega$

证明 Bernstein 定理

我们可以证明一个更一般的结论：

定理

任意集合 A，$X_0 \subseteq A$，f 是 A 到 A 的函数，令 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \cup f[X] \subseteq X\}$，则：$X_0 \cup f[\Omega] \subseteq \Omega$

Proof.

$\cap$-保持定理、$\forall X \in \wp(A), (Q(X) \Rightarrow \Omega \subseteq X)$ □